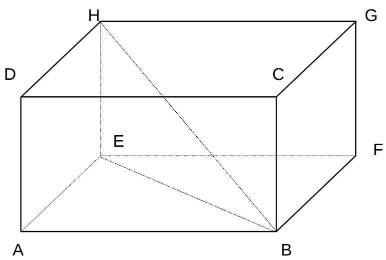
COLLEGE OLYMPE DE GOUGES

Solution du devoir n°M5

EXERCICE I

Soit un parallélépipède rectangle ABCDEFGH.



On note AB = a, BF = b, AD = c.

1) *On admet que le triangle BEH est rectangle en E. Démontrer que sa diagonale BH est donnée par la formule BH =* $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$

Dans le triangle ABE rectangle en A, d'après le théorème de Pythagore, on a :

$BE^2=AB^2+AE^2 = a^2+b^2$

Dans le triangle HBE rectangle en E, d'après le théorème de Pythagore, on a : $BH^2=BE^2+EH^2 = a^2+b^2 + c^2$

d'où BH = $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ (car BH $\geqslant$ 0)

2) *Application* :

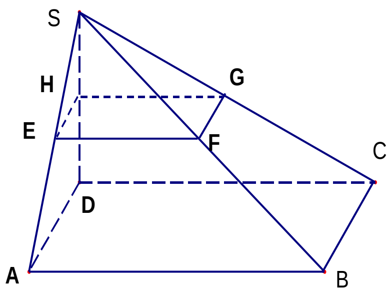
On donne a = 40 cm, b = 30 cm et c = 20 cm. Une canne de 53 cm de long peut-elle être contenue à l'intérieur de ce parallélépipède rectangle ? Justifier votre réponse.

Calculons BH :

BH = $\sqrt{40^2+30^2+20^2} = \sqrt{1600+900+400} = \sqrt{2900} \approx$ 53,85 cm (arrondi au centième)

La diagonale du parallélépipède rectangle est plus grande que la canne, on peut donc ranger cette canne à l'intérieur.

EXERCICE II



La figure représente une pyramide SABCD, de base le rectangle ABCD, dont l'arête [SD] est perpendiculaire à la face ABCD.

On donne :

AB = 72 mm, BC = 30 mm et SD = 75 mm.

1) *Calculer l'aire du rectangle ABCD en mm².*

Aire de ABCD : A_{ABCD}=AB $\times$ BC = 72 $\times$ 30 = 2160 mm^2

Calculer le volume de la pyramide SABCD, en mm³.

Volume de SABCD : $V_{SABCD} = \dfrac{A_{ABCD} \times hauteur}{3} = \dfrac{2160 \times 75}{3}$ = 54 000 mm^3.

2) *Calculer SA. Arrondir cette longueur en mm.*

Dans le triangle SDA rectangle en D, d'après le théorème de Pythagore, on a :

$SA^2 = SD^2+DA^2 = 75^2 + 30^2 = 6525$

D'où SA = $\sqrt{6525}$ car SA $\geqslant$ 0. Soit SA $\approx$ 81 mm (arrondi au mm)

3) *On coupe cette pyramide par un plan parallèle à la base ABCD, passant par le point H du segment [SD] situé à 50 mm de S.Soit EFGH la section obtenue.*

La pyramide SEFGH est une réduction de la pyramide SABCD.

a) *Calculer le coefficient de réduction sous la forme d'une fraction irréductible.*

Le coefficient de réduction est k = $\dfrac{SH}{SD} = \dfrac{50}{75} = \dfrac{2}{3}$.

b) En déduire l'aire du rectangle EFGH en mm² et le volume de la pyramide SEFGH en mm³.

L'aire du rectangle EFGH est :

$A_{EFGH} = k^2 \times A_{ABCD}$

$A_{EFGH} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 \times 2160$

$A_{EFGH} = \frac{4 \times 2160}{9}$

$A_{EFGH} = 960 \text{ mm}^2$

Le volume de la pyramide SEFGH est :

$V_{SEFGH} = k^3 \times V_{SABCD}$

$V_{SEFGH} = \left(\frac{2}{3}\right)^3 \times 54000$

$V_{SEFGH} = \frac{8 \times 54000}{27}$

$V_{SEFGH} = 16\,000 \text{ mm}^3$

<u>EXERCICE III</u>

L'unité de longueur est le centimètre et l'unité de volume est le centimètre cube.

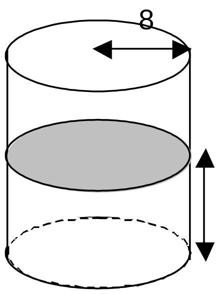


figure 1

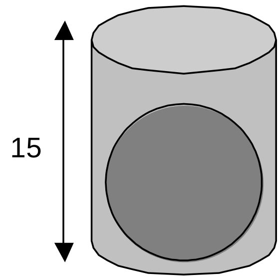


figure 2

On note h la hauteur d'eau dans un cylindre de rayon 8 et de hauteur 15 (figure 1).

On place au fond de ce cylindre une boule de rayon 6 et on constate que le cylindre est totalement rempli (figure 2).

1) Calculer en fonction de π le volume du cylindre.

$V_{cylindre} = \pi \times \text{rayon}^2 \times \text{hauteur}$

$V_{cylindre} = \pi \times 8^2 \times 15$

$V_{cylindre} = 960\pi \text{ cm}^3$

2) *Montrer que la valeur exacte du volume de la boule est 288π.*

$V_{boule} = \frac{4}{3} \times \pi \times \text{rayon}^3 = \frac{4}{3} \times \pi \times 6^3 = 288\pi \text{ cm}^3$

3) *Déduire des question précédentes la hauteur h de l'eau dans le cylindre avant qu'on y place la boule.*

Calculons le volume d'eau :

1ère méthode : $V_{eau} = V_{cylindre} - V_{boule} = 960\pi - 288\pi = 672\pi \text{ cm}^3$

2ème méthode : $V_{eau} = \pi \times \text{rayon}^2 \times \text{hauteur} = \pi \times 8^2 \times h = 64\pi h \text{ cm}^3$.

On en déduit que : $64\pi h = 672\pi$ d'où $h = \frac{672\pi}{64\pi} = \frac{672}{64} = \frac{21}{2} = 10{,}5$ cm.