

Fonctions linéaires et affines

I. Fonctions linéaires

A. Définition

- Soit a un nombre fixé, on définit une fonction linéaire f lorsque, à tout nombre x , on associe ax .

On note : $f : x \rightarrow ax$

Vocabulaire :

- a est le coefficient de linéarité de f
- si $a = 0$, f est une fonction constante, toujours égale à 0 (fonction nulle)
- Rappel : $f(x)$ s'appelle l'image de x par la fonction f , on écrit : $f(x) = ax$

exemple : tableau de proportionnalité

x	2	3	5
f(x)	6	9	15

 $\times 3$

La fonction $f : x \rightarrow 3x$ est une fonction linéaire, son coefficient de linéarité est 3 (c'est aussi le coefficient de proportionnalité du tableau)

Calculons $f(4)$ et $f(-1)$: $f(4) = 3 \times 4 = 12$ et $f(-1) = 3 \times (-1) = -3$

Pour la fonction f , l'image de 4 est 12, l'image de -1 est -3 .

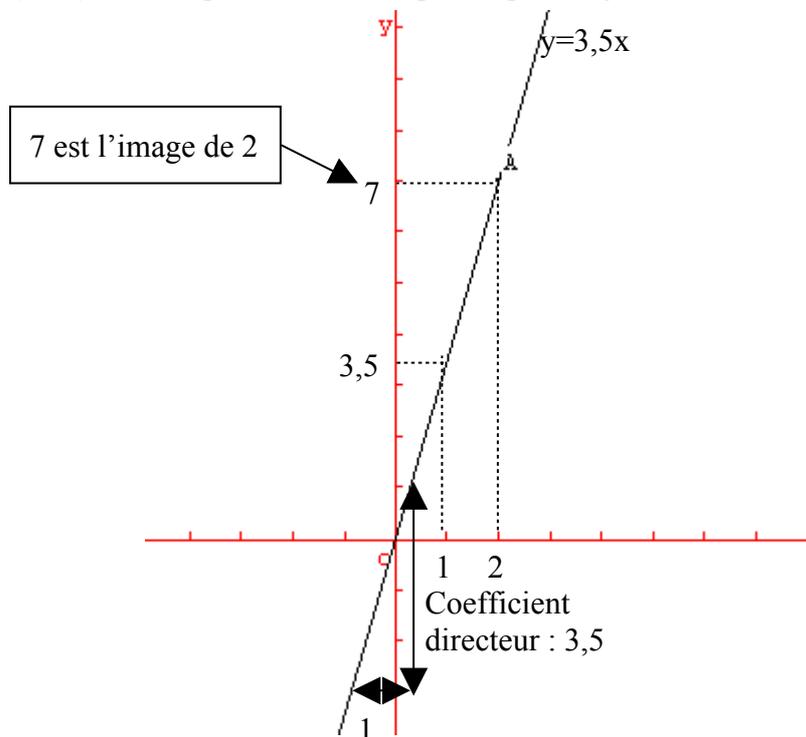
B. Représentation graphique

Exemple : Représentons $f : x \rightarrow 3,5x$

Calculons $f(0) = 3,5 \times 0 = 0$ (on a toujours $f(0) = 0$ pour une fonction linéaire)

Choisissons une autre valeur au hasard et calculons son image : $f(2) = 3,5 \times 2 = 7$

La droite D représentant la fonction linéaire $f : x \rightarrow 3,5x$ passe par l'origine et par le point $A(2 ; 7)$. On dit que la droite D a pour équation $y = 3,5x$



- La représentation graphique de la fonction linéaire $f : x \rightarrow ax$ est la droite d'équation $y = ax$. Cette droite passe par l'origine du repère .
a s'appelle le coefficient directeur de la droite.

Propriété : Toute droite passant par l'origine du repère et non confondue avec l'axe des ordonnées est la représentation graphique d'une fonction linéaire. Son équation est de la forme $y = ax$.

II.Fonctions affines

A.Définition

Soit a et b deux nombres fixés, on définit une fonction affine f lorsque, a tout nombre x , on associe $ax + b$.

On note : $f : x \rightarrow ax + b$

Vocabulaire :

- si $a = 0$, f est une application constante.
- Si $b = 0$, f est une application linéaire.
- Rappel : $f(x)$ s'appelle l'image de x par la fonction f , on écrit $f(x) = ax + b$

Exemples :

$f(x) = 3x - 1$ est une application affine ($a = 3$; $b = -1$)

$g(x) = 5x$ est une application linéaire ($a = 5$)

$h(x) = 8$ est une application affine constante ($a = 0$; $b = 8$)

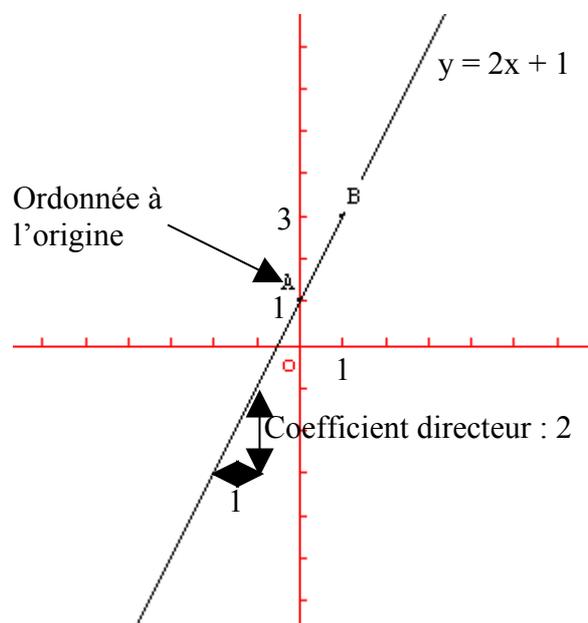
$j(x) = x^2 - 1$ n'est pas une application affine

B.Représentation graphique

Exemple : Représentons $f : x \rightarrow 2x + 1$

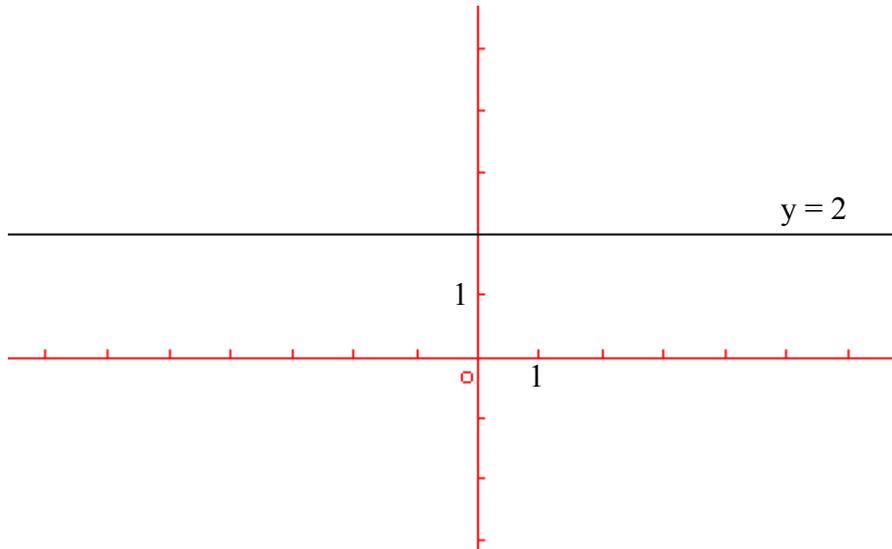
Calculons 2 valeurs (prises au hasard) $f(0) = 1$ et $f(1) = 3$

La droite D représentant la fonction affine $f : x \rightarrow 2x + 1$ passe par les points $A(0 ; 1)$ et $B(1 ; 3)$



- La représentation graphique de la fonction affine $f : x \rightarrow ax + b$ est la droite d'équation $y = ax + b$. Cette droite est parallèle à la représentation graphique de la fonction $g : x \rightarrow ax$ et passe par le point $A(0 ; b)$.
- a s'appelle le coefficient directeur de la droite
- $b = f(0)$ s'appelle l'ordonnée à l'origine.

Exemple : Représenter $f : x \rightarrow 2$ ($a = 0$)



La représentation graphique d'une fonction constante (fonction affine avec $a = 0$) est une droite parallèle à l'axe des abscisses.

Propriété : Toute droite non parallèle à l'axe des ordonnées est la représentation graphique d'une fonction affine. Son équation est de la forme $y = ax + b$.

III. Détermination d'une fonction affine ou linéaire

A. Fonction linéaire

Déterminer l'application linéaire f telle que $f(2) = -4$

On cherche a tel que $f(x) = ax$

$$f(2) = -4 \text{ donne } -4 = a \times 2$$

$$a = -2$$

La solution est $f : x \rightarrow -2x$

B. Fonction affine

Déterminer l'application affine f telle que $f(3) = -1$ et $f(-2) = 2$

On cherche a et b tels que $f(x) = ax + b$

$$f(3) = -1 \text{ donne } -1 = a \times 3 + b$$

$$f(-2) = 2 \text{ donne } 2 = a \times (-2) + b$$

On résout le système :

$$\begin{cases} -1 = 3a + b \\ 2 = -2a + b \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = -1 - 3a \\ 2 = -2a + (-1 - 3a) \end{cases}$$

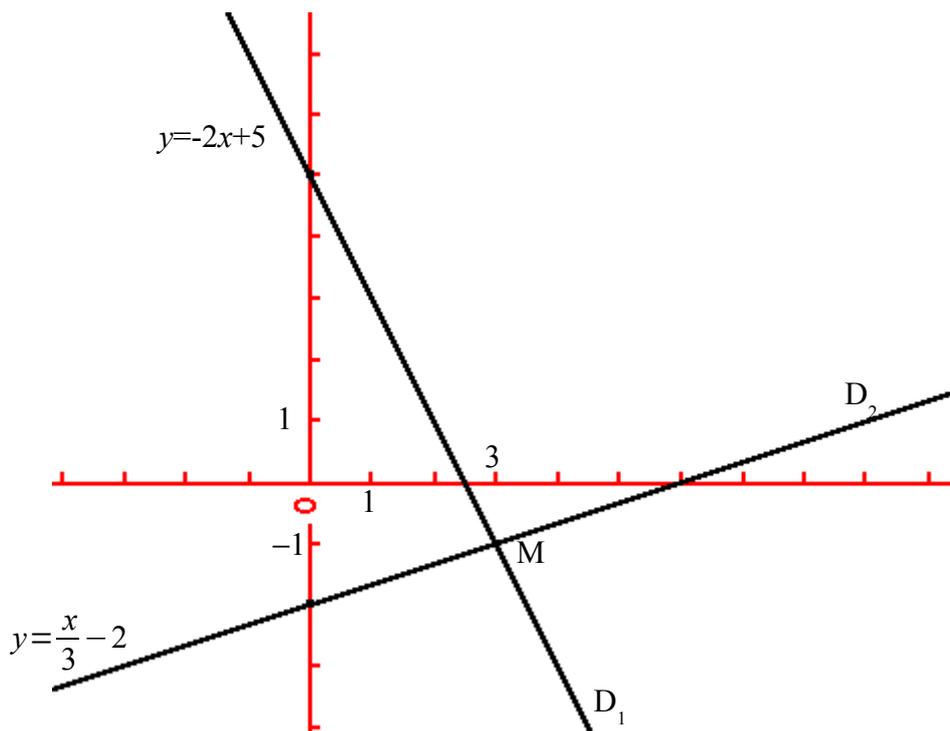
$$\dots \begin{cases} b = \frac{4}{5} \\ a = \frac{-3}{5} \end{cases}$$

La solution est $f : x \rightarrow -\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}$

IV. Résolution graphique d'un système de deux équations à deux inconnues

Pour résoudre graphiquement le système suivant : $\begin{cases} 2x + y = 5 \\ x - 3y = 6 \end{cases}$ c'est à dire $\begin{cases} y = -2x + 5 \\ y = \frac{x}{3} - 2 \end{cases}$;

il suffit de déterminer les coordonnées du point d'intersection des 2 droites $D_1 : y = -2x + 5$ et $D_2 : y = \frac{x}{3} - 2$



On lit $M(3 ; -1)$. La solution du système est donc le couple $(3 ; -1)$
(le vérifier en résolvant le système précédent par le calcul)

Remarque : Cette méthode n'est pas toujours applicable